

# MEDIDAS DE POLARIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE RENDA E SUA EVOLUÇÃO NO BRASIL DE 1995 A 2021

Rodolfo Hoffmann<sup>1</sup> e Josimar Gonçalves de Jesus<sup>2</sup>, novembro de 2022<sup>3</sup>

Texto para Discussão n. 73 do IEPE/Casa das Garças

## Resumo

Ressalta-se a importância de distinguir bipolarização de multipolarização na análise da distribuição da renda e discute-se a interpretação das principais medidas para esses conceitos. Usando dados da PNAD, analisa-se a evolução da bipolarização da distribuição da renda domiciliar per capita no Brasil de 1995 a 2021, mostrando que ela é muito semelhante à evolução da desigualdade. Usando a mesma base de dados, analisa-se como variou, de 1995 a 2015, a medida de multipolarização de Esteban e Ray, mostrando a importância de escolher o valor apropriado do respectivo parâmetro ( $\alpha$ ) de sensibilidade à multipolarização; verifica-se que com  $\alpha = 1$  essa medida capta a crescente relevância, no período 1995-2015, do pico de frequência de rendas iguais ao salário mínimo. Demonstra-se que o “Median Relative Polarization”, proposto por Handcock e Morris (1999), não capta mudanças na polarização e criticam-se trabalhos com resultados falsos sobre a evolução da polarização da distribuição da renda no Brasil.

**Palavras-chave:** Polarização; Desigualdade; Distribuição de renda; Brasil.

**JEL:** C10, D31.

## Abstract

### Measures of polarization of income distribution and its evolution in Brazil from 1995 to 2021

The importance of distinguishing bipolarization from multipolarization in the analysis of income distribution is emphasized and the interpretation of the main measures for these concepts is discussed. Using PNAD data, we analyze the evolution of bipolarization of the distribution of per capita household income in Brazil from 1995 to 2021, showing that it is very similar to the evolution of inequality. Using the same database, the evolution of the multipolarization measure of Esteban and Ray from 1995 to 2015 is analysed, showing the importance of choosing the appropriate value of the respective parameter ( $\alpha$ ) of multipolarization sensitivity; it is verified that with  $\alpha = 1$  this measure captures the growing

---

<sup>1</sup> Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo (ESALQ-USP), Brasil.

Orcid: <http://orcid.org/0000-0002-2077-8202>

E-mail: [hoffmannr@usp.br](mailto:hoffmannr@usp.br)

<sup>2</sup> Doutor em Economia Aplicada pela Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo (ESALQ-USP), Brasil. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-8287-632>

E-mail: [josimar.jgj@gmail.com](mailto:josimar.jgj@gmail.com)

<sup>3</sup> Os autores agradecem a Angela Kageyama e Celia Kerstenetzky a leitura crítica de uma versão preliminar do texto.

relevance, in the period 1995-2015, of the spike of incomes equal to the minimum wage. It is demonstrated that the "Median Relative Polarization" of Handcock and Morris (1999) does not capture changes in polarization and papers with false results on the evolution of the polarization of income distribution in Brazil are criticized.

**Keywords:** Polarization; Inequality; Income distribution; Brazil.

## **Introdução**

É usual dizer que um dos grandes problemas da economia brasileira é o elevado grau de desigualdade da sua distribuição de renda. O uso de medidas apropriadas de desigualdade (com destaque para o índice de Gini) está bem estabelecido, embora haja muita polêmica sobre as limitações dos dados disponíveis e a maneira como devem ser combinados e interpretados. Seria a polarização uma característica distinta da desigualdade da distribuição da renda? Como aferir sua intensidade? Divergência de resultados foi uma característica dos primeiros trabalhos publicados sobre polarização da distribuição da renda no Brasil. Enquanto Scorzafave e Castro (2007) concluem que os níveis de polarização acompanharam a redução do índice de Gini entre 1981 e 2003 e que “o tão comentado fenômeno de desaparecimento da classe média não vem ocorrendo no Brasil”, Figueiredo et al. (2007), usando dados de 1987 a 2003 e interpretando erroneamente medidas de multipolarização (ver Hoffmann, 2008), afirmam que ocorreu “forte aumento” da polarização e “esvaziamento das classes intermediárias”. Divergências entre conclusões de trabalhos publicados até 2014 são comentadas em Hoffmann (2017).

Na seção 1 do presente artigo ressaltamos a necessidade de distinguir os conceitos de bipolarização e multipolarização, examinamos como podem ser medidos e qual é sua relação com a desigualdade. Na seção seguinte usamos dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) e da PNAD Contínua para analisar a bipolarização da distribuição da renda domiciliar per capita (RDPC) de 1995 a 2021. Na seção 3 usamos os dados da PNAD para avaliar e interpretar a evolução da multipolarização da distribuição da RDPC no Brasil no período 1995-2015. Na seção 4 mostramos que a “Median Relative Polarization” não é uma medida apropriada de polarização e criticamos trabalhos com resultados falsos sobre a evolução da polarização da distribuição da renda no Brasil.

### **1. Medidas de bipolarização e de multipolarização**

A proposta pioneira de uma medida de bipolarização na distribuição de renda (ou de qualquer outra variável contínua) é a de Wolfson (1994 e 1997). A mesma proposta aparece anteriormente em um “Working Paper” de Foster e Wolfson (1992), cuja versão revista foi publicada em 2009. Justifica-se, assim, denominá-la “medida de Wolfson” ou “medida de Foster e Wolfson”.

Considere-se a divisão da distribuição em duas metades delimitadas pela mediana. Seja  $m$  a mediana da distribuição,  $\mu$  a média,  $G$  o índice de Gini geral,  $G_E$  o índice de Gini da desigualdade entre as duas metades e  $G_D = G - G_E$  a correspondente medida da desigualdade dentro das duas metades. Então a medida de polarização de Wolfson é

$$P_W = (G_E - G_D) \frac{\mu}{m} \quad (1)$$

Como  $G_D = G - G_E$ , segue-se que

$$P_W = (2G_E - G) \frac{\mu}{m} \quad (2)$$

Como bem discutido nos trabalhos mencionados, essa medida se destinava a captar a bipolaridade na distribuição da renda, isto é, a concentração em “ricos” e “pobres” e a concomitante redução da “classe média”.

Denominamos de “discrepância” ( $D$ ) a diferença entre a ordenada da linha de perfeita igualdade e a ordenada da curva de Lorenz da distribuição de renda. Sabemos que a discrepância é máxima ( $D_{max}$ ) no ponto correspondente à média ( $\mu$ ). Pode-se verificar que a discrepância no ponto correspondente à mediana ( $D_{50}$ ) é igual ao índice de Gini da desigualdade entre as duas metades, isto é,  $D_{50} = G_E$ . Então, de (2) segue-se que<sup>4</sup>

$$P_W = (2D_{50} - G) \frac{\mu}{m} \quad (3)$$

O axioma da bipolaridade aumentada estabelece que, quando uma distribuição de renda é dividida em duas metades (abaixo e acima da mediana), transferências progressivas envolvendo pessoas que estão e permanecem dentro de uma das metades causam aumento da polarização, ao mesmo tempo em que, de acordo com o princípio de Pigou-Dalton, reduzem a desigualdade dentro das metades e a desigualdade total, pois a desigualdade entre as duas metades permanece a mesma (Chakravarty, 2009). No caso das expressões (1) ou (2), as transferências progressivas mencionadas levariam a redução em  $G_D$  e em  $G$ , sem alterar  $G_E$ , mostrando que a medida  $P_W$  obedece ao axioma da bipolaridade aumentada. O axioma e a expressão (1) sugerem que uma medida de bipolarização é, essencialmente, um contraste entre a desigualdade *entre* duas partes (rendas altas *versus* rendas baixas) e a desigualdade *dentro* das duas partes. Mas o limite entre as duas partes não precisa ser a mediana. Se adotarmos a renda média ( $\mu$ ) como o limite entre as duas partes, por analogia com (3), obtemos a medida de bipolarização

$$P_M = 2D_{max} - G \quad (4)$$

---

<sup>4</sup> Wolfson (1994 e 1997) acrescenta um fator 2 nessa fórmula, argumentando que isso se destina a obter um índice que, na ausência de rendas negativas, varia de 0 a 1. Como isso não é verdade (ver a nota 1 em Hoffmann, 2008, p. 182), preferimos manter a fórmula mais simples.

É claro que o axioma da bipolaridade aumentada precisa ser reformulado: quando uma distribuição de renda é dividida em duas partes (abaixo e acima de um limite), transferências progressivas envolvendo pessoas que estão e permanecem dentro de uma das duas partes causam aumento da polarização, ao mesmo tempo em que, de acordo com o princípio de Pigou-Dalton, reduzem a desigualdade dentro das partes e a desigualdade total, pois a desigualdade entre as duas partes permanece a mesma.

Variando o limite entre as duas partes e mudando a medida de desigualdade (usando, por exemplo, o índice de Theil em lugar do índice de Gini, podem ser definidas várias outras medidas de polarização (Hoffmann, 2017).

Um outro trabalho pioneiro sobre uma medida de polarização da distribuição de renda foi publicado em 1994 por Esteban e Ray. Trata-se de um artigo estatisticamente sofisticado em que, levando em consideração tanto a identificação (proximidade) entre pessoas de um grupo quanto a alienação (separação) entre grupos, deriva-se uma medida de multipolarização. Trata-se de uma medida que pode captar a existência de 1, 2 ou mais picos na distribuição. Diferentemente da medida de Wolfson, ela não foi concebida tendo em vista a bipolarização, isto é, a maior concentração de “ricos” de um lado e “pobres” do outro, com concomitante redução da “classe média”.

Essa medida de multipolarização é rediscutida e aperfeiçoada nos trabalhos de Duclos, Esteban e Ray (2004) e Esteban, Gradín e Ray (2007). Vamos admitir que a distribuição de renda tenha sido dividida em  $n$  estratos (grupos ordenados), dos mais pobres aos mais ricos; seja  $\pi_i$  (com  $i = 1, 2, \dots, n$ ) a fração da população no  $i$ -ésimo estrato e seja  $\mu_i$  a respectiva renda relativa, isto é, a renda média do estrato padronizada de maneira que a média geral seja igual a um ( $\sum_{i=1}^n \pi_i \mu_i = 1$ ). A medida de polarização de Esteban e Ray é definida como<sup>5</sup>

$$P_{ER}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i^{\alpha+1} \pi_j |\mu_i - \mu_j| \quad (5)$$

Com  $\alpha = 0$  essa medida é igual ao dobro do índice de Gini entre os  $n$  grupos. O parâmetro  $\alpha$  pode ser associado ao grau de sensibilidade à polarização. Em aplicações empíricas, Duclos, Esteban e Ray (2004) utilizam  $\alpha = 0,25, 0,50, 0,75$  ou  $1,00$ , enquanto Esteban, Gradín e Ray (2007), para uma modificação do índice original, consideram  $\alpha = 1, 1,3$  ou  $1,6$ . Não há critérios estabelecidos para escolher o valor de  $\alpha$  nem para delimitar os  $n$  grupos. Esteban, Gradín e Ray (2007) recomendam que, escolhido o número ( $n$ ) de grupos, a sua delimitação seja feita de maneira a minimizar a desigualdade dentro dos grupos, dada

---

<sup>5</sup> Note-se que o uso de rendas médias relativas faz com que seja indiferente fazer os cálculos com as rendas em moeda corrente ou com valores deflacionados, desde que o fator de deflação seja o mesmo para toda a população analisada.

por  $G - G_n$ , sendo  $G$  o índice de Gini geral com os dados individuais e  $G_n$  o índice de Gini da desigualdade entre os  $n$  grupos. O número de grupos fica a critério do pesquisador (dependendo dos objetivos da pesquisa). Eles argumentam, ainda, que a desigualdade dentro dos  $n$  grupos deve ser usada para fazer uma “correção” da medida de polarização, que passa a ser

$$P_{EGR}(\alpha, \beta) = P_{ER}(\alpha) - \beta(G - G_n) \quad (6)$$

Em seguida Esteban, Gradín e Ray provam que, considerando a divisão da distribuição de renda em duas partes delimitadas pela mediana e adotando  $\alpha = \beta = 1$ , obtém-se

$$P_{EGR}(1,1) = 2D_{50} - G = \frac{m}{\mu} P_W \quad (7)$$

e considerando a divisão em duas partes delimitadas pela média, obtém-se a medida definida em (4):

$$P_{EGR}(1,1) = 2D_{max} - G = P_M \quad (8)$$

Resultados admiráveis para quem aprecia as generalizações matemáticas: a medida de multipolarização (6) praticamente inclui, como casos particulares, as medidas de bipolarização  $P_W$  e  $P_M$ . Note-se, entretanto, que o caráter muito abrangente da medida (6) é obtido à custa da indefinição da delimitação dos  $n$  grupos e do valor de dois parâmetros ( $\alpha$  e  $\beta$ ). Qualquer aplicação prática da medida (6) exige que se defina a delimitação dos grupos e se estabeleçam os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Alguns exemplos numéricos artificiais ajudam a compreender diferentes mudanças captadas pelas medidas  $P_W$ ,  $P_M$  e  $P_{ER}$ . O símbolo  $P_{ER}$  será usado para a medida calculada adotando  $\alpha = 1$ . Nos demais casos o valor de  $\alpha$  será sempre explicitado, como em  $P_{ER}(\alpha = 0,25)$ .

**Exemplo 1.** Seis pessoas com rendas 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Como a mediana é igual à média ( $m = \mu$ ),  $P_M = P_W$ . Verifica-se que  $G = 0,278$  e  $P_W = 0,302$ . Considerando a divisão da distribuição em 6 grupos (cada pessoa é um grupo), verifica-se que  $P_{ER} = 0,0926$ .

Fazemos duas transferências progressivas de uma unidade monetária: uma da terceira para a primeira pessoa e outra da sexta para a quarta. A nova distribuição tem três pessoas com renda 2 e três com renda 5. A figura 1 mostra a distribuição das frequências relativas antes e após as transferências progressivas.

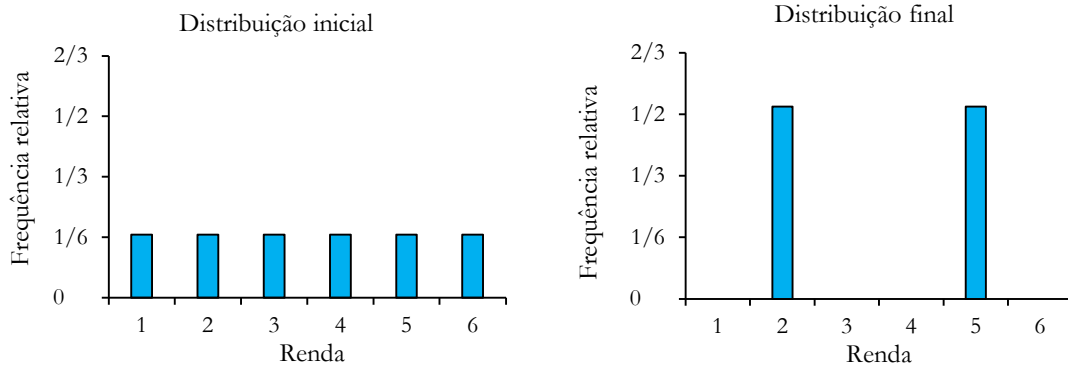


Figura 1 - Distribuição das frequências relativas antes e após as transferências progressivas.

Devido às transferências progressivas o índice de Gini diminui para  $G = 0,214$ . As transferências progressivas reduzem a desigualdade dentro das duas metades da distribuição; como a desigualdade entre as metades não é afetada, o valor de  $P_M = P_W$  aumenta para 0,429. Para calcular  $P_{ER}$  na nova situação é indiferente continuar considerando a divisão em 6 grupos, sendo 4 deles com probabilidade  $\pi_i = 0$ , ou passar a considerar que a distribuição está dividida em apenas dois grupos com  $\mu_1 = 2$  e  $\mu_2 = 5$ . O novo valor de  $P_{ER}$  é 0,2143; o aumento se deve ao crescimento de dois picos na distribuição. Neste exemplo, apesar da redução na desigualdade, tanto  $P_W$  com  $P_{ER}$  aumentam, deixando claro que polarização e desigualdade são conceitos distintos.

**Exemplo 2.** Cinco pessoas com rendas 1, 2, 3, 4 e 5. Temos  $m = \mu = 3$ . Verifica-se que  $G = 0,267$  e  $P_W = P_M = 0,267$ . Considerando a divisão da distribuição em 5 grupos (cada pessoa é um grupo), verifica-se que  $P_{ER} = 0,107$ .

Fazemos uma transferência progressiva de uma unidade monetária da quarta para a segunda pessoa. A nova distribuição tem uma pessoa com renda 1, três pessoas com renda 3 e uma com renda 5. A figura 2 mostra a distribuição das frequências relativas antes e após as transferências progressivas.

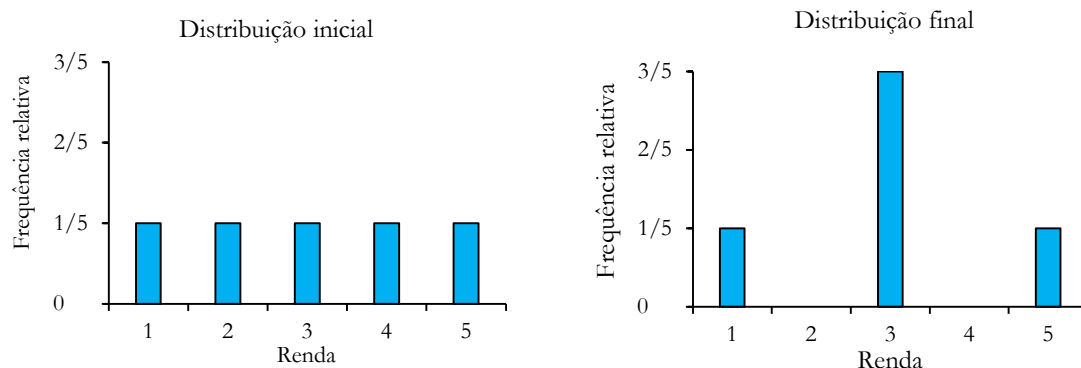


Figura 2 - Distribuição das frequências relativas antes e após as transferências progressivas.

Devido à transferência progressiva o índice de Gini diminui para  $G = 0,213$ . A transferência progressiva diminui a desigualdade entre as duas metades e as medidas de bipolarização  $P_M =$

$P_W$  diminuem para 0,107. Por outro lado, o crescimento de um pico no meio da distribuição, com as pessoas com rendas 1 e 5 passando a constituir picos secundários, está associado ao aumento do valor de  $P_{ER}$  de 0,107 para 0,149. Esse exemplo deixa clara a possibilidade de comportamento muito distinto entre uma medida de bipolarização e a medida  $P_{ER}$ . Fica evidente, também, que o aumento de  $P_{ER}$  não pode ser automaticamente associado à redução da “classe média”, pois nesse exemplo o aumento dessa medida se deve ao surgimento de um pico no meio da distribuição. Esse exemplo mostra, também, que a medida de “multipolarização”  $P_{ER}$  pode aumentar devido ao surgimento ou crescimento de um pico (um polo). Cabe ressaltar que não há polarização na ausência de desigualdade. No caso especial de todas as rendas serem iguais, com toda a distribuição concentrada em um único pico, tanto as medidas de bipolarização como as medidas de multipolarização são nulas.

É interessante, nesse exemplo, ver o que ocorre com a medida de Esteban e Ray para  $\alpha = 0,25$  e  $\alpha = 0,5$ . Na situação inicial, com rendas iguais a 1, 2, 3, 4 e 5,  $P_{ER}(\alpha = 0,25) = 0,357$  e  $P_{ER}(\alpha = 0,5) = 0,239$ . Após a transferência progressiva os valores são  $P_{ER}(\alpha = 0,25) = 0,319$  e  $P_{ER}(\alpha = 0,5) = 0,243$ . Com  $\alpha = 0,5$  o índice cresce, variando no mesmo sentido que  $P_{ER}$  com  $\alpha = 1$  mas com um valor mais baixo do parâmetro ( $\alpha = 0,25$ ) o índice varia no mesmo sentido que o índice de Gini.

**Exemplo 3.** Quinze pessoas com rendas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15. Temos  $m = \mu = 8$ . Verifica-se que  $G = 0,311$  e  $P_M = P_W = 0,311$ . Considerando a divisão da distribuição em 15 grupos (cada pessoa é um grupo), verifica-se que  $P_{ER} = 0,0415$ . Realizamos três transferências progressivas de uma unidade monetária: da pessoa com renda 4 para a pessoa com renda 2, da pessoa com renda 9 para a pessoa com renda 7 e da pessoa com renda 14 para a pessoa com renda 12. Realizamos, também, três transferências progressivas de duas unidades monetárias: da pessoa com renda 5 para a pessoa com renda 1; da pessoa com renda 10 para a pessoa com renda 6 e da pessoa com renda 15 para a pessoa com renda 11. A nova distribuição tem cinco pessoas com renda 3, cinco pessoas com renda 8 e cinco com renda 13. A figura 3 mostra a distribuição das frequências relativas antes e após as transferências progressivas.

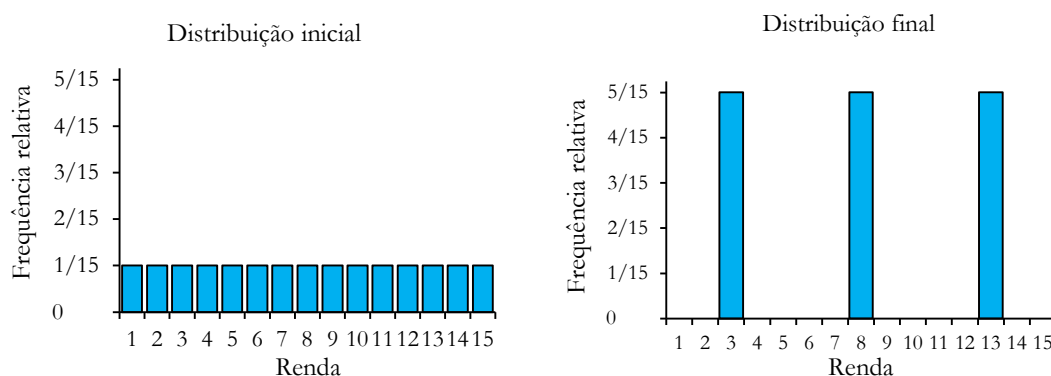


Figura 3 - Distribuição das frequências relativas antes e após as transferências progressivas.

A série de transferências progressivas faz o índice de Gini cair para 0,278. Com a criação de três picos na distribuição, o índice  $P_{ER}$  aumenta substancialmente para 0,185. Quatro das seis transferências progressivas diminuem a desigualdade dentro das duas metades da distribuição, contribuindo para aumentar a bipolarização, mas duas das seis transferências descritas reduzem a desigualdade entre as metades, contribuindo para reduzir a bipolarização. Ocorre predominância desse último efeito e o valor de  $P_M = P_W$  cai para 0,278. Esse é mais um exemplo em que a medida de multipolarização varia em sentido oposto ao da variação da medida de bipolarização.

**Exemplo 4.** Vamos considerar a distribuição da variável contínua  $x$  ilustrada na Figura a seguir.

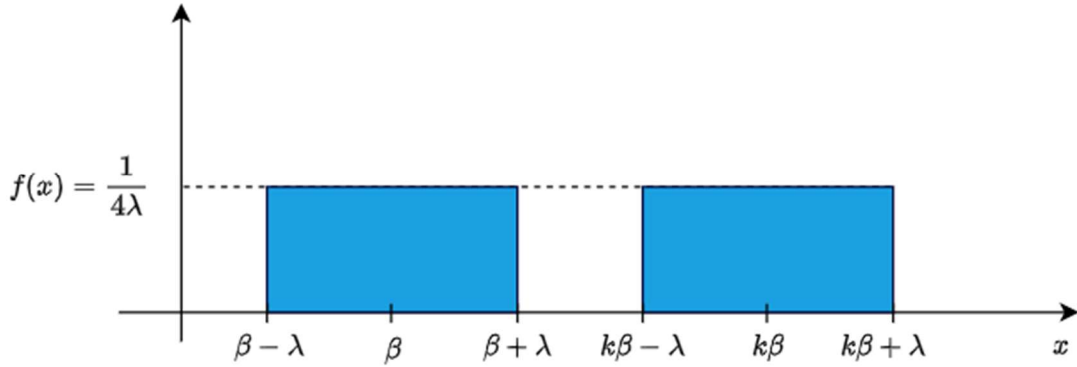


Figura 4. Uma distribuição contínua simétrica composta por duas distribuições uniformes

A primeira metade é uma distribuição uniforme de  $\beta - \lambda$  a  $\beta + \lambda$  e a segunda metade é uma distribuição uniforme de  $k\beta - \lambda$  a  $k\beta + \lambda$ . Admite-se que  $k > 1$ ,  $\beta > 0$  e  $\lambda \geq 0$ . Se supomos que  $x$  nunca é negativa, devemos ter  $\lambda \leq \beta$ . É fácil verificar que a mediana e a média são  $m = \mu = \frac{1}{2}(k + 1)\beta$ . Pode-se demonstrar (Ver os Apêndices 1 e 2) que o índice de Gini da desigualdade entre as duas metades é

$$G_e = D_{50} = D_{max} = \frac{k - 1}{2(k + 1)} \quad (9)$$

e que o índice de Gini de toda a distribuição é

$$G = \frac{k - 1}{2(k + 1)} + \frac{\lambda}{3\beta(k + 1)} \quad (10)$$

Tendo em vista as expressões (2) e (4), obtém-se



$$P_W = P_M = \frac{k-1}{2(k+1)} - \frac{\lambda}{3\beta(k+1)} \quad (11)$$

Vamos imaginar, agora, que os valores de  $k$  e  $\beta$  são fixados e que, partindo de  $\lambda = 0$ , vamos aumentando o valor de  $\lambda$ . Para que não haja sobreposição das duas metades, devemos ter  $k\beta - \lambda \geq \beta + \lambda$ , ou seja,

$$\lambda \leq \frac{(k-1)\beta}{2} \quad (12)$$

Com  $\lambda = 0$  temos (fixados  $k$  e  $\beta$ ) o máximo de bipolarização, com metade da distribuição concentrada em  $x = \beta$  e a outra metade concentrada em  $x = k\beta$ . À medida que aumentamos o valor de  $\lambda$ , a bipolarização vai sendo reduzida, até que a distribuição se torne uma única distribuição uniforme de  $\beta - \frac{1}{2}(k-1)\beta$  a  $k\beta + \frac{1}{2}(k-1)\beta$ .

No caso particular em que  $k = 3$ , as expressões (10) e (11) se tornam

$$G = \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{12\beta} \quad (13)$$

e

$$P_W = P_M = \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{12\beta} \quad (14)$$

Quando  $\lambda$  aumenta de zero até o valor  $\beta$ , o índice de Gini da distribuição cresce linearmente de  $1/4$  para  $1/3$ , ao mesmo tempo que as medidas de bipolarização  $P_W$  e  $P_M$  decrescem linearmente de  $1/4$  para  $1/6$ . Desigualdade e bipolarização variam em sentidos opostos. Voltaremos a usar esse exemplo na avaliação de uma falsa medida de polarização.

## 2. Evolução da bipolarização da distribuição da renda no Brasil

Em Hoffmann (2008) analisamos a variação das medidas de bipolarização  $P_W$  e  $P_M$  no Brasil de 1997 a 2005 (com resultados para 2006 e 2007 em um Apêndice), considerando tanto a distribuição do rendimento de todos os trabalhos por pessoa ocupada como a distribuição da renda domiciliar per capita (RDPC). Em Hoffmann (2017) é analisada a evolução dessas e de várias outras medidas de polarização da distribuição da RDPC no Brasil de 1995 a 2013 e são criticamente avaliados os trabalhos anteriores sobre o tema. Observa-se que no período 1995-2013 ocorre clara redução da bipolarização da distribuição da RDPC no Brasil, acompanhando a redução da desigualdade.

Em sua tese de doutorado, Fantinel (2017) analisou a evolução do índice de polarização de Wolfson no Brasil e nas suas cinco grandes regiões, considerando tanto a distribuição da RDPC como a distribuição da renda de todos os trabalhos por pessoa ocupada no período 1995-2014. Em outras duas partes da tese é analisada a influência da

desigualdade e da polarização da RDPC sobre o crescimento econômico e o número de determinados crimes (homicídios e roubos e furtos de veículos).

Em outra tese de doutorado, Monçores (2020) analisou a evolução da bipolarização da distribuição da renda do trabalho no Brasil de 1995 a 2015, em conjunto e separando homens e mulheres, utilizando o índice de Wolfson e medidas que consideram a divisão da população entre os 10% mais ricos e os 90% restantes e constatou “que a bipolarização da renda seguiu o curso da desigualdade, reduzindo-se para mulheres e homens” (Monçores, 2020, p. 113).

Aqui vamos utilizar os dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) tradicional para o período 1995-2015 e os dados da PNAD Contínua (PNADC) anual para o período 2012-2021<sup>6</sup>. Note-se que para um período de quatro anos (2012-2015) dispomos dos dados das duas pesquisas. Até 2003 a PNAD tradicional não coletava dados da área rural da antiga região Norte (abrangendo Rondônia, Acre, Amazonas, Roraima, Pará e Amapá). Então, para uniformizar a série de 1995 a 2015, os dados dessa área são excluídos do total de microdados das pesquisas de 2004 a 2015. Hoffmann (2020) mostra que essa exclusão tem efeito desprezível sobre as principais características da distribuição da renda no País. Por outro lado, há diferenças metodológicas importantes entre a PNAD Contínua e a tradicional. Na PNAD tradicional eram coletados os valores dos rendimentos no mês de referência, que foi sempre setembro no período 1995-2015; na PNAD Contínua a coleta é feita ao longo do ano.

Assim, a PNAD Contínua capta variações estacionais nos rendimentos que não podem ser captadas pela PNAD tradicional. “Outra diferença importante ocorre na estratificação da amostra. Na PNAD tradicional havia três estágios de seleção: municípios (unidades primárias), setores censitários (unidades secundárias) e domicílios (unidades terciárias). Já na PNAD Contínua há apenas dois estágios no processo de amostragem: no primeiro são selecionadas as unidades primárias de amostragem (UPAs, formadas por um ou mais setores censitários) e no segundo são selecionados os domicílios dentro de cada UPA (IBGE, 2014). Esse procedimento, sem o estágio de seleção de municípios, faz com que a PNAD Contínua capte melhor a variabilidade geográfica (espacial)” (Hoffmann, Jesus e Almeida, 2018, p. 8).

Os resultados obtidos estão na Tabela 1 e nas Figuras 5 e 6. Cabe ressaltar que os resultados obtidos da PNAD tradicional se referem, para todo o período 1995-2015, ao Brasil exclusive a área rural da antiga região Norte, mas no caso da PNADC, para o período 2012-2021, a amostra representa o País todo. Note-se que a PNAD não foi realizada em 2000 e em 2010, anos em que o IBGE fez Censos Demográficos.

---

<sup>6</sup> Foram utilizados os arquivos de microdados da PNAD Contínua anual desde 2012 divulgados pelo IBGE em novembro de 2021.

Tabela 1. Índice de Gini, T de Theil e medidas de bipolarização ( $P_W$  e  $P_M$ ) da distribuição da renda domiciliar per capita no Brasil com base nos microdados da PNAD tradicional (1995-2015) e da PNAD Contínua (2012-2021)

Ano	Índice de Gini		Índice de Theil		$P_W$		$P_M$	
	PNAD	PNADC	PNAD	PNADC	PNAD	PNADC	PNAD	PNADC
1995	0,599	-	0,727	-	0,312	-	0,296	-
1996	0,600	-	0,726	-	0,318	-	0,296	-
1997	0,600	-	0,731	-	0,316	-	0,295	-
1998	0,598	-	0,728	-	0,305	-	0,294	-
1999	0,592	-	0,706	-	0,298	-	0,291	-
2001	0,594	-	0,719	-	0,302	-	0,290	-
2002	0,587	-	0,705	-	0,295	-	0,287	-
2003	0,581	-	0,680	-	0,289	-	0,281	-
2004	0,569	-	0,656	-	0,279	-	0,273	-
2005	0,566	-	0,651	-	0,273	-	0,270	-
2006	0,560	-	0,634	-	0,265	-	0,266	-
2007	0,552	-	0,614	-	0,261	-	0,257	-
2008	0,543	-	0,593	-	0,251	-	0,252	-
2009	0,539	-	0,588	-	0,246	-	0,248	-
2011	0,527	-	0,560	-	0,232	-	0,238	-
2012	0,524	0,540	0,578	0,589	0,228	0,243	0,236	0,247
2013	0,523	0,532	0,552	0,565	0,226	0,237	0,234	0,243
2014	0,513	0,526	0,532	0,548	0,220	0,231	0,231	0,241
2015	0,513	0,524	0,525	0,546	0,221	0,232	0,229	0,238
2016	-	0,537	-	0,576	-	0,244	-	0,246
2017	-	0,539	-	0,586	-	0,242	-	0,244
2018	-	0,545	-	0,602	-	0,247	-	0,249
2019	-	0,544	-	0,601	-	0,243	-	0,246
2020	-	0,524	-	0,56	-	0,227	-	0,235
2021	-	0,544	-	0,593	-	0,248	-	0,245

A Figura 5 mostra a conhecida queda da desigualdade de 2001 a 2015 e vários outros fenômenos já analisados em trabalhos anteriores. Considerando o período para o qual dispomos das duas pesquisas, observa-se que a PNADC, por causa do procedimento de amostragem distinto, capta mais desigualdade na distribuição do RDPC do que a PNAD tradicional (Hoffmann, 2020). Grande parte da redução de desigualdade conquistada entre 1997 e 2015 é perdida no período 2015-2018. A queda da desigualdade em 2020 está fortemente associada ao Auxílio Emergencial de R\$ 600 nos três últimos trimestres do ano (Hoffmann e Jesus, 2022).

A simples comparação entre as Figuras 5 e 6 mostra que há grande semelhança entre o comportamento da bipolarização e o da desigualdade da distribuição da RDPC no Brasil no período analisado. A bipolarização também caiu substancialmente entre 1997 e 2015,

aumenta de 2015 a 2018 e sofre redução momentânea em 2020. Da mesma maneira que no caso da desigualdade, observa-se que no período em que dispomos dos dados da PNAD e da PNADC, as medidas de bipolarização são maiores quando usamos os microdados da PNADC.

Considerando os dados da PNAD de 1995 a 2015 (19 observações), verifica-se que a correlação entre  $G$  e  $T$  é igual a 0,996, entre  $G$  e  $P_W$  é 0,996, entre  $G$  e  $P_M$  é 0,999 e entre  $P_W$  e  $P_M$  é 0,995. Desnecessário dizer que para todas essas correlações, o teste da hipótese de nulidade tem probabilidade caudal (valor  $p$ ) inferior a 0,01%. Note-se que as correlações entre o índice de Gini e as medidas de bipolarização são iguais ou maiores do que as correlações entre as duas medidas de desigualdade ou entre as duas medidas de bipolarização. Não há dúvida de que, em princípio, uma medida de bipolarização pode apresentar variações distintas das de uma medida de desigualdade, mas as medidas de bipolarização da distribuição da RDPC no Brasil têm acompanhado muito de perto as variações da respectiva desigualdade.

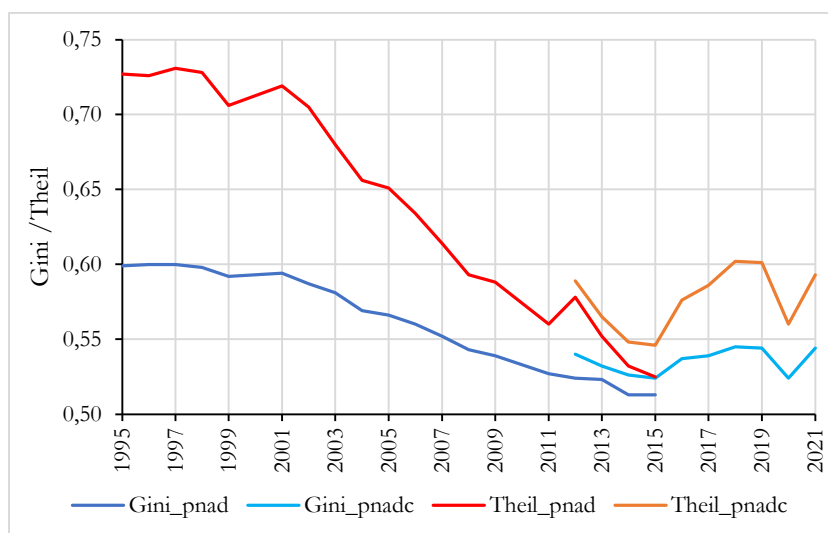


Figura 5. Evolução de duas medidas ( $G$  e  $T$ ) da desigualdade da distribuição da RDPC no Brasil de 1995 a 2021, conforme dados da PNAD tradicional e da PNAD Contínua

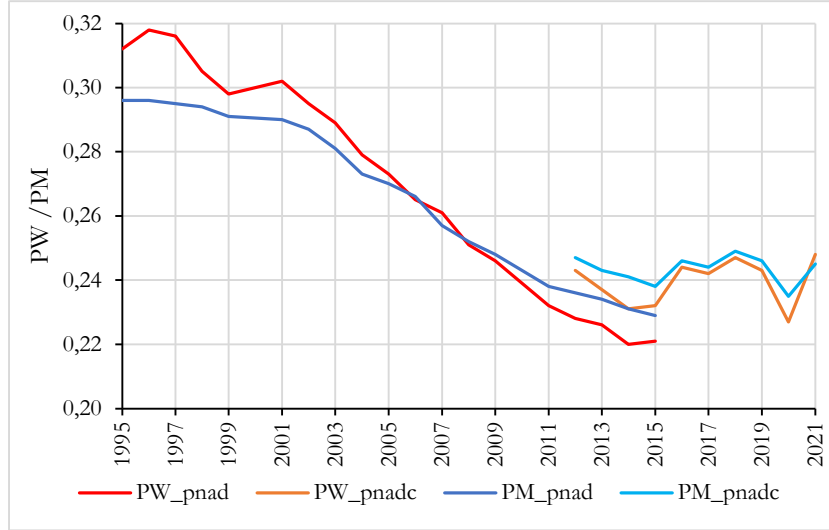


Figura 6. Evolução de duas medidas de bipolarização ( $P_W$  e  $P_M$ ) da distribuição da RDPC no Brasil de 1995 a 2021, conforme dados da PNAD tradicional e da PNAD Contínua

### 3. Evolução da multipolarização da distribuição da renda no Brasil

Em vários trabalhos tem sido calculada a medida de multipolarização  $P_{DER}$  proposta por Duclos, Esteban e Ray, utilizando dados sobre a distribuição da renda no Brasil<sup>7</sup>. Trata-se de uma medida baseada no índice  $P_{ER}$  de Esteban e Ray, mas em cujo cálculo se usa uma estimativa da função de densidade da distribuição da renda, contornando o problema da delimitação previa dos  $n$  estratos, indispensável ao cálculo da expressão (5). Mas as duas medidas ( $P_{ER}$  e  $P_{DER}$ ) têm a mesma fundamentação e devem mostrar evolução semelhante desde que seja adotado o mesmo valor para o parâmetro  $\alpha$  e haja certa compatibilidade entre a delimitação dos  $n$  estratos e o grau de suavização na estimação da função de densidade. Verificamos que os resultados podem ser substancialmente diferentes conforme se use determinado tipo de rendimento ou o seu logaritmo.

Neste trabalho foram calculadas medidas  $P_{ER}$  utilizando os microdados da PNAD de 1995 a 2015 referentes à distribuição da RDPC. Considerou-se a distribuição de uma variável  $y$  definida como o logaritmo da RDPC de cada pessoa<sup>8</sup>, levando em consideração o fator de expansão (peso) de cada observação, fornecido pelo IBGE. A distribuição foi dividida em estratos com amplitude<sup>9</sup> 0,05 e para cada estrato foi calculada a fração da população no estrato ( $\pi_i$ ) e a respectiva renda relativa ( $\mu_i$ ). Para cálculo do índice foi utilizada a seguinte expressão, que pode ser deduzida de (5):

$$P_{ER}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \pi_i^{1+\alpha} \left[ 1 + 2 \left( \mu_i \sum_{j=1}^i \pi_j - \sum_{j=1}^i \pi_j \mu_j \right) - \mu_i \right] \quad (15)$$

<sup>7</sup> Os mais recentes são Fantinel (2017), Fantinel e Porto Jr. (2017) e Monçores (2020).

<sup>8</sup> O valor de  $y$  foi fixado em 0 sempre que  $RDPC \leq 1$ . Ver explicações adicionais no Apêndice 3.

<sup>9</sup> Também foram calculados índices considerando estratos de  $y$  com amplitude 0,02, 0,1 ou 0,5.

Finalmente, para evitar que a medida  $P_{ER}$  assumisse valores muito pequenos devido à pequena amplitude dos estratos, foi feita uma correção associada à densidade de frequência relativa, multiplicando os valores por  $\left(\frac{1}{0,05}\right)^\alpha$ ; note-se que isso não afeta os resultados para  $\alpha = 0$ . Os resultados para  $\alpha = 0,25$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 0,75$  e  $\alpha = 1$  são apresentados na Tabela 2 e ilustrados pela Figura 7. Na segunda coluna da Tabela 2 está o índice de Gini da desigualdade entre os  $n$  estratos, que é igual à metade do valor de  $P_{ER}$  para  $\alpha = 0$ . Como o número de estratos é grande (sempre maior que 175), esse índice é praticamente igual ao índice de Gini da distribuição da RDPC apresentado na Tabela 1. Na última coluna da Tabela 2 consta a porcentagem de pessoas, em cada ano, com RDPC igual ao salário mínimo corrente; as duas porcentagens mais elevadas (acima de 3,2%) são observadas em 2002 e 2005, quando o salário mínimo, em moeda corrente, era R\$ 200 e R\$ 300, respectivamente. Veremos adiante a importância dessa porcentagem para entender a evolução da medida  $P_{ER}$ .

Tabela 2. Evolução, de 1995 a 2015, do índice de Gini entre estratos ( $G_n$ ) e das medidas de polarização  $P_{ER}$  com  $\alpha = 0,25$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 0,75$  e  $\alpha = 1$  para a distribuição da RDPC no Brasil

Ano	$G_n$	Medida $P_{ER}$ com $\alpha$ igual a				% com RDPC= Salário Mínimo
		0,25	0,5	0,75	1	
1995	0,599	0,746	0,501	0,354	0,259	3,15
1996	0,600	0,744	0,493	0,342	0,244	1,41
1997	0,600	0,745	0,497	0,348	0,251	2,29
1998	0,598	0,741	0,493	0,344	0,247	1,85
1999	0,592	0,737	0,491	0,341	0,245	1,35
2001	0,593	0,737	0,493	0,345	0,249	1,76
2002	0,587	0,735	0,497	0,354	0,261	3,24
2003	0,581	0,726	0,487	0,343	0,249	2,03
2004	0,569	0,714	0,483	0,342	0,250	1,86
2005	0,566	0,716	0,490	0,353	0,265	3,27
2006	0,559	0,705	0,479	0,342	0,252	2,51
2007	0,552	0,699	0,477	0,341	0,252	2,05
2008	0,543	0,690	0,473	0,339	0,251	2,05
2009	0,539	0,686	0,472	0,340	0,254	2,12
2011	0,527	0,677	0,470	0,342	0,258	2,53
2012	0,524	0,673	0,470	0,346	0,263	2,86
2013	0,523	0,674	0,471	0,346	0,264	2,76
2014	0,513	0,665	0,466	0,345	0,264	3,00
2015	0,513	0,666	0,470	0,350	0,272	3,11

Observa-se, na Figura 7, que no período 1995-2015, no qual os dados da PNAD indicam que ocorreu substancial modificação da distribuição da RDPC, com relevante redução da desigualdade, o índice  $P_{ER}(\alpha = 0,25)$  mostra comportamento quase igual ao do índice de Gini; a correlação entre essas duas variáveis é igual a 0,999. Isso indica que a medida  $P_{ER}$ , que é igual ao dobro de  $G_n$  quando  $\alpha = 0$ , ainda não capta nada muito distinto do que mede o índice de Gini para valores baixos de  $\alpha$ .

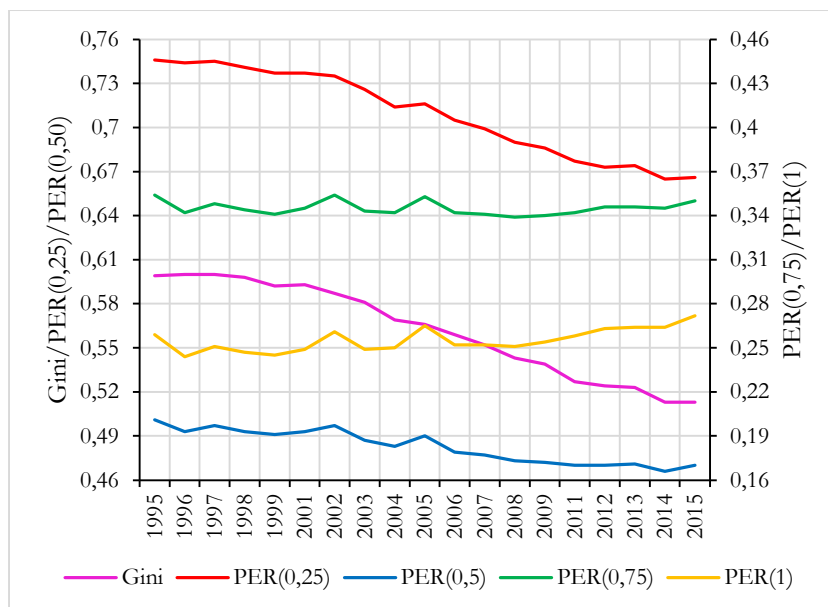


Figura 7. Evolução, de 1995 a 2015, na distribuição da RDPC no Brasil, do índice de Gini  $G_n$  e das medidas de polarização  $P_{ER}$  com  $\alpha = 0,25$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 0,75$  e  $\alpha = 1$

A Figura 7 mostra que com  $\alpha = 0,5$  a medida  $P_{ER}$  ainda mostra comportamento semelhante ao do índice de Gini; a correlação entre  $P_{ER}(\alpha = 0,5)$  e  $G_n$  é igual a 0,963. Mas o comportamento da medida  $P_{ER}$  se torna diferente para valores mais altos de  $\alpha$ . A correlação entre  $P_{ER}(\alpha = 0,75)$  e  $G_n$ , na Tabela 2 é igual a 0,142 (que não é estatisticamente diferente de zero, pois a probabilidade caudal do teste de nulidade é igual a 56,3%) e a correlação entre  $P_{ER}(\alpha = 1)$  e  $G_n$  é igual a  $-0,681$  (com probabilidade caudal do teste de nulidade igual a 0,13%). Com  $\alpha = 1$  a medida  $P_{ER}$  certamente está captando algo diferente da desigualdade medida pelo índice de Gini. O desafio é entender o que explica essas tendências em sentidos opostos.

Hoffmann (2008) mostra a forte associação entre a medida  $P_{ER}(\alpha = 1)$  da distribuição do rendimento de todos os trabalhos por pessoa ocupada e a porcentagem de pessoas com rendimento igual ao salário mínimo. No caso do rendimento de todos os trabalhos essa porcentagem é maior do que para a RDPC, atingindo mais de 12% em 2002 e 2005 (Hoffmann, 2008, Tabela 1, p. 176). É claro que a probabilidade de obter valor igual ao salário mínimo diminui ao se dividir o rendimento domiciliar pelo número de pessoas do domicílio para obter a RDPC. Mesmo assim, a correlação entre a última coluna da Tabela 2 e o valor de  $P_{ER}(\alpha = 1)$  é muito forte, igual a 0,907, com probabilidade caudal do teste de nulidade inferior a 0,01%. O valor de  $P_{ER}(\alpha = 1)$  está fortemente associado à intensidade de um pico existente na distribuição da RDPC que se deve à grande frequência de rendas iguais ao salário mínimo. A Figura 8 ilustra a semelhança no comportamento das duas variáveis. Note-se como o valor de  $P_{ER}(\alpha = 1)$  acompanha a oscilação da porcentagem de pessoas com RDPC igual ao salário mínimo em 2002 e 2005, anos em que o salário mínimo foi um número redondo em centenas de reais.

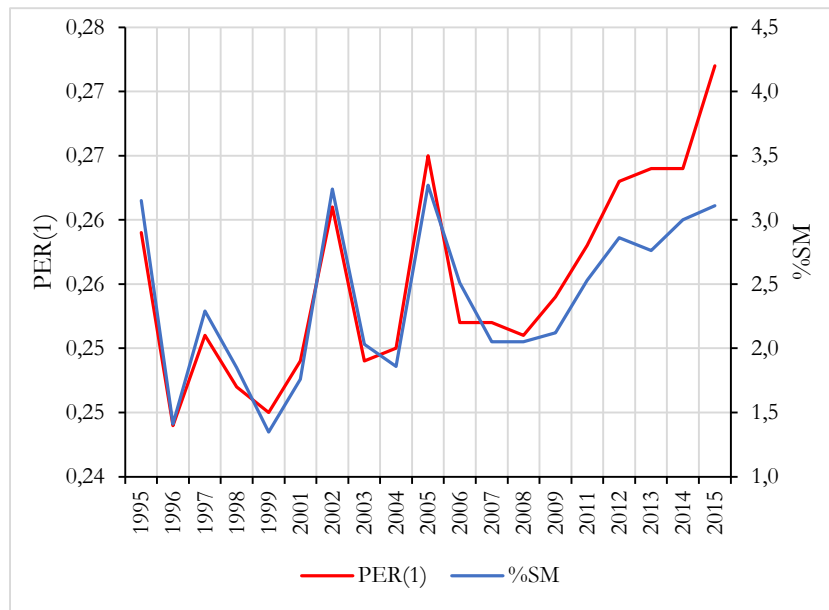


Figura 8. Evolução, de 1995 a 2015, na distribuição da RDPC no Brasil, da medida de polarização  $P_{ER}$  com  $\alpha = 1$  e da porcentagem de pessoas com RDPC igual ao salário mínimo

A Figura 9 ajuda a entender a questão. Ela mostra o histograma da distribuição do logaritmo da RDPC, considerando estratos com amplitude igual a 0,05. Essa é a distribuição que foi utilizada para calcular as medidas apresentadas na Tabela 2 para 2015. Há muitos picos associados à tendência de as pessoas declararem números redondos, mas destacam-se os picos relacionados ao salário mínimo (R\$ 788) e à metade do seu valor.

De 1995 a 2015 o salário mínimo real mostra uma clara tendência de crescimento. Considerando o valor em setembro de cada ano, que é o mês de referência da PNAD, e adotando o INPC como deflator, o salário mínimo real em 2015 é 110% maior que o de 1995. Este é um dos fatores importantes na redução da desigualdade da distribuição da renda no Brasil no período. Por outro lado, na medida em que o salário mínimo é uma barreira para a dispersão das rendas a valores mais baixos, o crescimento do seu valor real faz crescer o “represamento” de valores nesse limite, aumentando o pico de frequências de rendas com esse valor<sup>10</sup>. Note-se, na Figura 8, a tendência de crescimento da porcentagem de pessoas com RDPC igual ao salário mínimo corrente. Assim, o crescimento do salário mínimo real, que contribuiu para a redução da desigualdade, fez com que tendesse a ser cada vez maior o pico de frequência de rendas iguais ao seu valor, causando o crescimento de  $P_{ER}(\alpha = 1)$ .

<sup>10</sup> Ver a análise desse fenômeno em Bacha e Hoffmann (2015, p. 66-68). O efeito do salário mínimo na forma da distribuição da renda foi ressaltado por Soares (2004).



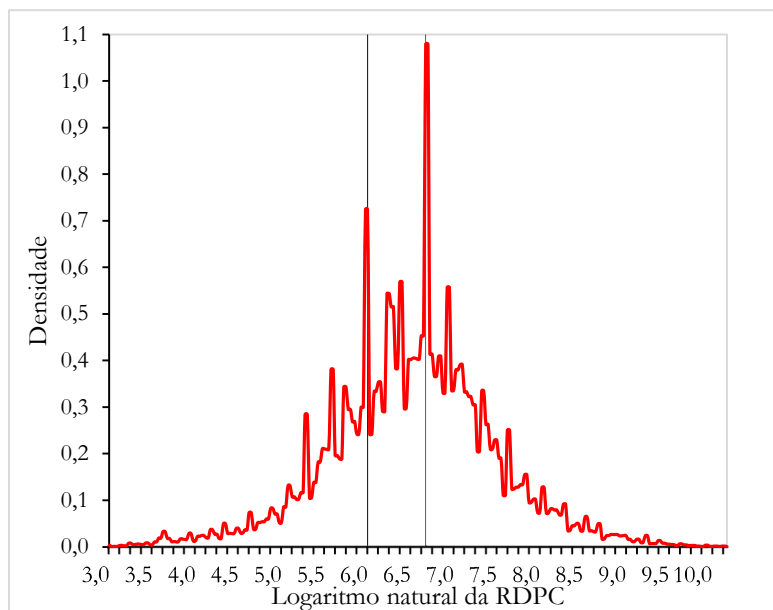


Figura 9. Densidade de frequência relativa em intervalos com amplitude 0,05 no logaritmo da RDPC, conforme microdados da PNAD de 2015, com pico maior no intervalo que inclui o salário mínimo de R\$ 788 ( $\log 788 = 6,67$ ) e pico secundário no intervalo que inclui meio salário mínimo ( $\log 394 = 5,98$ ).

O que acontece com a medida  $P_{ER}(\alpha = 0,5)$ ? Ela ainda está relativamente “próxima” de uma medida de desigualdade (quando  $\alpha = 0$ , a medida  $P_{ER}$  é proporcional ao índice de Gini) e, nesse sentido, tenderia a decrescer; mas ela também reflete o crescimento do pico de rendas iguais ao salário mínimo; acaba não refletindo bem nenhum dos dois fenômenos. Infelizmente, tanto no trabalho de Fantinel (2017) como no de Monçores (2020) os autores optaram por calcular a medida de Duclos, Esteban e Ray (2004) com  $\alpha = 0,5$ , não obtendo nenhuma conclusão economicamente relevante dessa medida<sup>11</sup>.

Gasparini et al. (2008) analisam tanto medidas de bipolarização como de multipolarização para um grande número de países. Examinando a correlação, entre países, do índice de Gini e do índice  $P_{DER}$ , eles obtêm sempre valores positivos, embora notem que a correlação diminui quando o parâmetro  $\alpha$  aumenta de 0,25 para 1. No final do artigo concluem que “At least in the Latin American context and for the indicators used in this paper, income inequality seems a good proxy for income polarization”. Endossamos a afirmativa no que se refere às medidas de bipolarização, mas não para as medidas de multipolarização. Mostramos que no Brasil, no período 1995-2015, o índice  $P_{ER}(\alpha = 1)$  variou em sentido oposto ao do índice de Gini.

É comum discutir os índices  $P_{ER}$  e  $P_{DER}$  repetindo a interpretação genérica apresentada nos trabalhos originais de Esteban e Ray (1994) e Duclos, Esteban e Ray (2004): mais polarização corresponde a maior alienação entre grupos e maior identificação dentro dos grupos. Mas não faz sentido aplicar mecanicamente essa interpretação a variações dos

<sup>11</sup> Fantinel (2017, p. 56) também obteve o índice de polarização de Esteban, Gradin e Ray dividindo a distribuição do rendimento de todos os trabalhos em três ou quatro grupos, mostrando que esse índice tem tendência decrescente no período 1995-2014 (da mesma maneira que a medida de bipolarização de Wolfson).

índices  $P_{ER}$  e  $P_{DER}$  da distribuição da renda no Brasil. Na Figura 9 se destacam os picos de densidade de frequências de rendas domiciliares per capita em torno de 1 salário mínimo e de meio salário mínimo, mas isso não significa que a polarização da distribuição esteja associada a algum “conflito” entre pessoas nesses dois grupos.

#### 4. Uma falsa medida de polarização

Handcock e Morris (1999) propõem uma medida destinada à comparação entre duas distribuições que eles denominam “Median Relative Polarization” (MRP). Os autores explicam que a medida se destina a avaliar a diferença de forma entre duas distribuições que tenham a mesma mediana. Seja  $x$  a variável com função de distribuição  $F(x)$ , a ser comparada com a distribuição de  $x_0$ , cuja função de distribuição é  $F_0(x_0)$ . Seja  $r$  o valor da função de distribuição  $F_0$  para cada valor de  $x$ , isto é,

$$r = F_0(x) \quad (16)$$

A distribuição de  $r$  é denominada distribuição relativa de  $x$  em relação a  $x_0$ . Sendo  $E$  o operador de esperança matemática, o índice MRP é definido como

$$\text{MRP} = 4E(|r - 0,5|) - 1 \quad (17)$$

Vejam, a seguir, como se comporta a índice MRP no caso do nosso **Exemplo 4**, isto é, o exemplo artificial ilustrado na Figura 4. Vamos considerar como inicial ( $x_0$ ) a distribuição com  $\lambda = 0$ . Então  $r = 0$  para  $x < \beta$ ,  $r = 0,5$  para  $\beta \leq x \leq k\beta$  e  $r = 1$  para  $x > k\beta$  e para uma distribuição daquele tipo, com  $\lambda > 0$  e obedecida a restrição (12),

$$\text{MRP} = 4 \left( 0,5 \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 0,5 \frac{1}{4} \right) - 1 = 0$$

O fato de MRP ser igual a zero independentemente do valor de  $\lambda$  mostra que esse índice é absolutamente insensível ao grau de polarização da distribuição. O índice MRP não é uma medida apropriada de polarização de uma distribuição. A leitura do livro de Handcock e Morris deixa claro que os autores não têm um conceito de polarização que seja distinto de desigualdade. A “polarização” está só no nome<sup>12</sup>.

Acontece que essa medida foi mal-usada em dois trabalhos publicados sobre “polarização” da distribuição da renda no Brasil: Clementi e Schettino (2013 e 2015).

Para comparar duas distribuições com medianas diferentes, o cálculo da MRP exige prévia translação de uma das distribuições para igualar as medianas. Vamos imaginar que desejamos comparar a distribuição de  $y$  com a distribuição de  $x$ , com mediana diferente. Então devemos criar uma distribuição intermediária  $x_0$  com a mesma “forma” de  $y$  e

<sup>12</sup> Conforme Panek e Zwierchowski (2020, p. 1042), “The general form of MRP index does not allow for an assessment of the degree of economic polarization in the strict sense, ...”.

mediana igual à de  $x$ , antes de aplicar as fórmulas (16) e (17). Para isso os valores de  $x_0$  devem ser obtidos multiplicando os valores de  $y$  pela razão entre a mediana de  $x$  e a mediana de  $y$ , a razão  $\frac{m_x}{m_y}$ . Isso representa uma translação na escala logarítmica, que não altera a desigualdade ou a polarização da distribuição. Não se deve igualar as medianas adicionando aos valores de  $y$  a diferença  $m_x - m_y$  pois isso altera a desigualdade e a polarização da distribuição. Se  $m_x - m_y > 0$ , o acréscimo dessa diferença aos valores de  $y$  reduz a desigualdade e a polarização e a comparação entre as distribuições de  $x$  e de  $x_0$  vai “revelar” mudanças artificialmente criadas pela prévia translação feita de maneira inapropriada. Esse erro leva Clementi e Schettino (2013 e 2015) a afirmarem que ocorreu aumento da polarização da distribuição da renda no Brasil de 2003 a 2012. Nos dois artigos eles também calculam um índice obtido multiplicando a medida de Foster e Wolfson pela mediana<sup>13</sup>. Essa medida cresce com a renda média, a qual cresce substancialmente no Brasil de 2003 a 2012. Clementi e Schettino constata, novamente, um falso crescimento da polarização da distribuição da renda no Brasil.

## 5. Conclusão

Os conceitos de bipolarização e multipolarização são distintos entre si e não se confundem com a ideia de desigualdade, mas ainda há boa dose de confusão sobre a maneira mais apropriada de medi-las. Para promover o aprofundamento da pesquisa sobre o tema, a literatura científica precisa evitar o uso de “polarização” como sinônimo de maior desigualdade. Já há várias medidas apropriadas de bipolarização e dispomos, também, de medidas de multipolarização, embora nesse último caso não estejam bem estabelecidos os procedimentos de cálculo (como o valor a ser adotado para o parâmetro  $\alpha$ ).

Em todo o período 1995-2021 a evolução da bipolarização da distribuição da RDPC no Brasil acompanhou de perto a evolução da desigualdade. Basta dizer que para as 19 observações do período 1995-2015, sempre com dados da PNAD, a correlação entre o índice de Gini e a medida de bipolarização de Wolfson é igual a 0,996.

Verificamos que a medida de multipolarização de Esteban e Ray ( $P_{ER}$ ) da distribuição da RDPC no Brasil no período 1995-2015 apresenta evolução muito distinta conforme o valor do parâmetro  $\alpha$  (0,25, 0,5, 0,75 ou 1). Com  $\alpha = 1$  a medida é fortemente afetada pelo pico de valores iguais ao salário mínimo corrente, ou seja, capta a intensidade de uma “monopolarização” no salário mínimo. Como o aumento real do salário mínimo no período reforça esse pico e, ao mesmo tempo, contribui para reduzir a desigualdade da distribuição, há forte correlação negativa entre o índice de Gini e o valor de  $P_{ER}(\alpha = 1)$ . Trata-se de um fenômeno estatístico interessante, mas cabe assinalar que nenhum dos diversos trabalhos que

---

<sup>13</sup> Nas palavras dos autores: “... we construct an ‘absolute’ counterpart of the Foster-Wolfson index by multiplying it by the median” (Clementi e Schettino, 2015, p.938).

calcularam uma medida semelhante, o índice de Duclos, Estebam e Ray, para o Brasil conseguiram extrair desses resultados alguma conclusão socioeconômica relevante.

Mostramos que o índice “Median Relative Polarization” (MRP) não serve para avaliar o grau de polarização de uma distribuição e que o cálculo dessa medida por Clementi e Schettino (2013 e 2015) foi feito de maneira inapropriada, levando-os a conclusões erradas sobre a evolução da polarização da distribuição da renda no Brasil.

### Apêndice 1 - Dedução da expressão (9)

Na distribuição ilustrada pela Figura 4, a metade mais pobre fica com a fração  $Y_1 = \frac{1}{k+1}$  da renda total e a metade mais rica fica com a fração  $Y_2 = \frac{k}{k+1}$  da renda total. De acordo com a expressão (3.44) em Hoffmann et al. (2019), o índice de Gini da desigualdade entre as duas metades é

$$G_e = D_{50} = 1 - \left[ \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2} + \left( 1 + \frac{1}{k+1} \right) \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{k-1}{2(k+1)} \quad (\text{A1})$$

### Apêndice 2 - Dedução da expressão (10)

Consideremos, preliminarmente, uma distribuição uniforme  $f(x) = \frac{1}{2\omega}$  para  $a - \omega \leq x \leq a + \omega$  e  $f(x) = 0$  para  $x < a - \omega$  e  $x > a + \omega$ . Supondo  $a \geq \omega$ , excluimos a possibilidade de valores negativos de  $x$ . Expressões para o índice de Gini ( $G$ ), a desigualdade entre as duas metades ( $D_{50}$ ) e a medida de polarização de Wolfson ( $P_W$ ) de uma distribuição uniforme são apresentadas nas páginas 326-327 de Hoffmann et al. (2019). Considerando a diferente parametrização da distribuição uniforme adotada aqui, com média e mediana iguais a  $a$ , as fórmulas ficam:

$$G = \frac{\omega}{3a} \quad (\text{A2})$$

$$D_{50} = \frac{\omega}{4a} \quad (\text{A3})$$

$$P_W = \frac{\omega}{6a} \quad (\text{A4})$$

De acordo com a expressão (A2), o índice de Gini da desigualdade dentro da primeira metade da distribuição descrita na Figura 4 é  $G_1 = \frac{\lambda}{3\beta}$  e o índice de Gini da desigualdade dentro da segunda metade é  $G_2 = \frac{\lambda}{3k\beta}$ .

De acordo com a expressão (3.43) em Hoffmann et al. (2019), o índice de Gini de toda a distribuição é  $G = G_e + \frac{1}{2}Y_1G_1 + \frac{1}{2}Y_2G_2$ . Utilizando os resultados obtidos anteriormente, após algumas passagens algébricas, obtemos

$$G = \frac{k-1}{2(k+1)} + \frac{\lambda}{3\beta(k+1)} \quad (A5)$$

Quando  $k\beta - \lambda = \beta + \lambda$ , ou seja,  $\lambda = \frac{(k-1)\beta}{2}$ , a distribuição da Figura 4 se torna uma única distribuição uniforme.

### **Apêndice 3 – Algumas considerações sobre o cálculo das medidas de multipolarização**

Para calcular a medida de multipolarização de Esteban e Ray (1994), conforme a expressão (15), foi elaborado programa próprio em SAS. Os estratos foram delimitados adotando intervalos com amplitude 0,05 no logaritmo da RDPC, mas cabe ressaltar que os valores de  $\mu_i$  foram obtidos a partir da RDPC média em cada estrato, e não do logaritmo. Note-se que o uso de  $y = \ln(\text{RDPC})$  para obter os valores de  $\mu_i$  faria com que a medida  $P_{ER}(\alpha = 0)$  fosse proporcional ao índice de Gini da distribuição de  $y$ , e não ao índice de Gini da RDPC.

Outros trabalhos, como Fantinel (2017) e Monçores (2020), calcularam a medida  $P_{DER}$  utilizando o pacote DASP (*Distributive Analysis Stata Package*) de Araar e Duclos. Infelizmente não há critérios bem estabelecidos para seleção do parâmetro  $\alpha$  e muito menos para escolher a largura da janela ao estimar a função de densidade da distribuição. A tendência é ficar com a largura da janela determinada automaticamente no pacote (o *default* do programa).

Como já comentamos, nossos resultados sugerem que para obter uma medida de multipolarização que capte melhor algo distinto do que é medido pelo índice de Gini é indicado o uso de  $\alpha = 1$ .

Usamos o DASP para calcular a medida  $P_{DER}$  com vários valores de  $\alpha$ , usando sempre a largura de janela *default* do programa, para os dados sobre distribuição da RDPC no Brasil de 1995 a 2015. Um resultado inesperado é que o  $P_{DER}(\alpha = 1)$  apresentou correlação ligeiramente negativa (não estatisticamente diferente de zero) com o valor de  $P_{ER}(\alpha = 1)$  apresentado na Tabela 2. E quando recalculamos a série de valores de  $P_{ER}(\alpha = 1)$  considerando estratos com amplitude 0,02 em  $y = \ln(\text{RDPC})$  obtivemos correlação elevada

(0,701, com probabilidade caudal do teste de nulidade igual a 0,08%). Esse resultado mostra a importância da escolha da amplitude dos estratos no cálculo do  $P_{ER}(\alpha = 1)$ , que está logicamente associada à largura da janela no cálculo do  $P_{DER}(\alpha = 1)$ .

Também usamos o DASP para calcular a medida  $P_{DER}(\alpha = 1)$  para a distribuição do logaritmo da RDPC. Essa medida, que passa a ser representada por  $P_{DER}^{ln}(\alpha = 1)$ , mostra correlação elevada com o valor de  $P_{ER}(\alpha = 1)$  apresentado na Tabela 2: coeficiente de correlação igual a 0,879, com probabilidade caudal do teste de nulidade inferior a 0,01%. O simples fato de usarmos o logaritmo da RDPC, e não a própria RDPC, muda radicalmente a correlação com  $P_{ER}(\alpha = 1)$ . Devemos comparar intervalos com iguais variações absolutas da renda ou com iguais variações relativas (escala logarítmica)? Há motivos para preferir a escala logarítmica. Em termos de bem-estar da pessoa que recebe a renda, a diferença de 500 a 1.000 é muito diferente da diferença de 10.000 a 10.500. Na análise da sensibilidade de medidas de desigualdade a transferências regressivas, Hoffmann e Botassio (2019) argumentam em favor do uso de intervalos fixados em termos relativos. Infelizmente, Duclos, Esteban e Ray (2004, p. 1761) induzem a erro quando afirmam que “... our measure only considers income differences across people, so that we may slide any distribution to left or right as we please”. O deslocamento da distribuição para a direita equivale a somar uma constante a todas as rendas, o que afeta as rendas relativas e obviamente afeta a medida de multipolarização (e também as medidas de desigualdade e de bipolarização). A adição de uma constante positiva a todas as rendas reduz o índice de Gini, que é proporcional à medida de multipolarização para  $\alpha = 0$ .

Pacotes como o DASP tornam relativamente fácil calcular os valores de  $P_{DER}$ , mas estamos longe de ter critérios bem estabelecidos para a escolha da variável (a renda ou seu logaritmo) e dos parâmetros e para a interpretação dos resultados.

## Referências

- Araar, A.; Duclos, J. (2022) *DASP: Distributive Analysis Stata Package*.
- Bacha, E.; Hoffmann, R. (2015) Uma interpretação estatística do PIB, da PNAD e do salário mínimo. *Revista de Economia Política*, v. 35, n. 1 (138): 64-74, jan.-março/2015.
- Chakravarty, S.R. *Inequality, polarization and poverty*. Springer, 2009.
- Clementi, F.; Schettino, F. (2013) Income polarization in Brazil, 2001-2011: a distributional analysis using PNAD data. *Economics Bulletin* 33(3): 1-16.
- Clementi, F.; Schettino, F. (2015) Declining inequality in Brazil in the 2000s: what is hidden behind? *Journal of International Development* 27: 929-952.
- Duclos, J.; Esteban, J. e Ray, D. (2004) Polarization: concepts, measurement, estimation. *Econometrica* 72 (6): 1737-1772.

- Esteban, J. e Ray, D. (1994) On the measurement of polarization. *Econometrica* 62 (4): 819-851.
- Esteban, J.; Gradín, C. e Ray, D. (2007) An extension of a measure of polarization, with an application to the income distribution of five OECD countries. *J. Econ. Inequal.* 5: 1-29.
- Fantinel, V.D. (2017) Ensaio sobre polarização de renda do Brasil. Tese (doutorado), Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, 126 p.
- Fantinel, V. D.; Porto Jr. S, (2017) Mensuração e evolução da polarização de renda no Brasil e suas regiões (1995-2014). In: XX Encontro de Economia da Região Sul. Porto Alegre: Anais do XX Encontro de Economia da Região Sul.
- Figueirêdo, E.A.; Silva Netto Jr., J.L. e Porto Jr., S. (2007) Distribuição, mobilidade e polarização de renda no Brasil: 1987 a 2003. *Revista Brasileira de Economia* 61 (1): 7-32.
- Foster, J.E.; Wolfson, M.C. (1992) Polarization and the decline of the middle class: Canada and the US. *OPHI Working Paper n. 31*. July 1992 (rev. August 2009).
- Gasparini, L.; Horenstein, M.; Molina, E.; Olivieri, S. (2008) Income polarization in Latin America: patterns and links with institutions and conflict. *Oxford Development Studies* 36 (4): 461-484.
- Handcock, M.S.; Morris, M. (1999) *Relative distribution methods in the social sciences*. New York: Springer.
- Hoffmann, R. (1998) Desigualdade e pobreza no Brasil no período 1979/97 e a influência da inflação e do salário mínimo. *Economia e Sociedade* (11): 199-221.
- Hoffmann, R. (2008) Polarização da distribuição da renda no Brasil. *Econômica* 10(2): 169-186, dezembro de 2008.
- Hoffmann, R. (2017) Medidas de polarização da distribuição da renda e sua evolução no Brasil de 1995 a 2013. *Economia e Sociedade*, v. 26, n. 1, pp. 165-186.
- Hoffmann, R. (2020) Desigualdade de renda no Brasil, 1995 a 2019: diversas distribuições e o impacto do desemprego. *Revista Brasileira de Economia Social e do Trabalho*, v. 2, e020007.
- Hoffmann, R.; Botassio, D. C.; Jesus, J. G. (2019) *Distribuição de renda: medidas de desigualdade, pobreza, concentração, segregação e polarização*. 2ª ed. Editora da Universidade de São Paulo.
- Hoffmann, R.; Botassio, D.C. Sensitivity of inequality measures considering regressive transfers with fixed relative income distance. *Metron*, v. 2020, p. 18, 2020.
- Hoffmann, R.; Jesus, J. G.; Almeida, S. S. P. (2018) A distribuição da renda no Brasil conforme a PNAD: 1995-2017. *Texto para Discussão nº 45 do IEPE/Casa das Garças*, ag./2018. Nova versão de maio/2019 incluindo anexo com resultados para rendimentos habituais.
- Hoffmann, R.; Jesus, J. G. (2022) A relevância do Auxílio Emergencial na redução da desigualdade em 2020. *Revista Brasileira de Economia Social e do Trabalho*, v. 4, e022001.
- IBGE (2014) *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua. Notas Metodológicas*. Vol. 1.

Monçores, E.A. (2020) Heterogeneidade do emprego feminino no Brasil: bipolarização e polarização dos rendimentos do trabalho entre 1995 e 2015. Tese (doutorado), Faculdade de Economia da Universidade Federal Fluminense, 157 p.

Panek, T.; Zwierzchowski, J. (2020) Median relative partial income polarization indices: investigating economic polarization in Poland during the years 2005-2015. *Social Indicators Research* 149: 1025-1044.

Scorzafave, L.G. e Castro, S.A.C. (2007) Ricos? Pobres? Uma análise da polarização da renda para o Brasil – 1981-2003. *Pesquisa e Planejamento Econômico* 37(2):283-297.

Soares, S.S.D. (2004) O impacto distributivo do salário mínimo: a distribuição individual dos rendimentos do trabalho. *Economia Aplicada* 8 (1): 47-76.

Wolfson, M.C. (1994) When inequalities diverge. *American Economic Review* 84 (2): 353-358.

Wolfson, M.C. (1997) Divergent inequalities: theory and empirical results. *Review of Income and Wealth* 43 (4): 401-421.